الفصل الأول	امتحان رياضيات/1/	جامعة دمشق
2013/2014	هندسة الميكانيك العام	كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

---

1) (10 درجات) حل النظام الخطي التالي بالإعتماد على طريقة كرامر Cramer´s rule:

$$x + y + z = 1$$
$$ax + by + cz = d$$
$$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$$

حيث أن a و b و c هي أعداد مختلفة.

2) (10 درجات) أوجد قيمة لـ q بحيث تكون الأشعة التالية مستقلة خطياً:

$$(1,1,2,1),\ (2,1,2,3),\ (1,4,2,1),\ (-1,3,5,q)$$

3) (15 درجة) لتكن المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

بيّن فيما اذا كانت المصفوفة A قابلة للإقطار أم أنها غير قابلة للإقطار. وفي حال أنها قابلة للإقطار أوجد مصفوفة P قابلة للقلب ومصفوفة قطرية D بحيث يكون $A = PDP^{-1}$ ، أما في حال أنها غير قابلة للإقطار بيّن السبب بالتفصيل.

4) (11 درجة) أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ ، ومن ثمّ حدد مجال تقاربها.

5) (12 درجة) أوجد مشتق كلا التابعين التاليين:

$$y = x^{\sqrt{x}} \quad \& \quad y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

6) (12 درجة) احسب قيمة كلا المقدارين التاليين:

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \quad \& \quad y = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1}$$

مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. اسماعيل ادريس

دمشق في ٢١/١/٢٠١٤

Scanned by CamScanner

جامعة دمشق — الرياضيات /1/ هـ الإلكترونيات والإتصالات — اسم الطالب:

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية — د. اسماعيل ادريس — الشعبة:

---

(8) 1. ليكن النظام الخطي التالي:

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 = b_1$$
$$-3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = b2$$
$$5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = b_3$$

حيث أن b_1 و b_2 و b_3 هي أعداد حقيقية

a) اكتب النظام الخطي أولاً على شكل معادلة شعاعية، ومن ثمَّ على شكل معادلة مصفوفية.

b) بيِّن أن النظام الخطي المُعطى غير قابل للحل من أجل جميع قيم $b = (b_1, b_2, b_3)$ الممكنة، ومن ثمَّ وضح ماذا تُمثِّل مجموعة القيم الممكنة لـ b التي يكون من أجلها النظام غير قابل للحل.

c) أوجد حلول النظام المعطى من أجل $b = (0,0,0)$ ومن أجل $b = (-2,0,-2)$، ومن ثمَّ اكتب هذه الحلول بالصيغة الشعاعية وقارن بين هذه الحلول هندسياً.

الحل: $\underline{a}$) على شكل معادلة شعاعية

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

← على شكل معادلة مصفوفية

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{b}$) لتحديد قيم b التي يكون من أجلها النظام الخطي قابل للحل، ندرج المصفوفة الموسعة

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ -3 & 3 & 6 & b_2 \\ 5 & -3 & -8 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -6 & -6 & b_2+3b_1 \\ 0 & 12 & 12 & b_3-5b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -6 & -6 & b_2+3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-5b_1+2b_2+6b_1 \end{pmatrix}$$

ومنه ينتج أن النظام الخطي غير قابل للحل إذا كان هناك عمود ارتكاز في العمود الأخير، أي:

$$b_3 - 5b_1 + 2b_2 + 6b_1 = b_1 + 2b_2 + b_3 \neq 0$$

وبالتالي فإن مجموعة قيم b التي يكون من أجلها النظام الخطي قابل للحل هو أن يكون

(1) $b_1 + 2b_2 + b_3 = 0$ وهذه المعادلة تمثل معادلة مستوي في $\mathbb{R}^3$.

$\underline{c}$) لتحديد حلول النظام من أجل بعض الخيارات لـ b، نحاول كتابة المصفوفة الموسعة بشكل مختزل: متفقاً مع الشكل النموذجي للإصطفاف (Echlon Form)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -6 & -6 & b_2+3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+2b_2+b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3b_1+b_2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & b_1+2b_2+b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1-\frac{3b_1+b_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{b_1+3b_2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & b_1+2b_2+b_3 \end{pmatrix}$$ (1)

(2) 2. لتكن A مصفوفة مربعة حيث أنه يوجد للمصفوفة $I - A$ مقلوب، أثبت أنه من أجل $A^4 = 0$ فإن $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

باستخدام الخاصة $x \cdot x^{-1} = x^{-1} x = I$ فعندئذٍ يكفي اثبات أن $(I-A)(I+A+A^2+A^3) = I$

$$(I-A)(I+A+A^2+A^3) = I^2 + IA + IA^2 + IA^3 - AI - A \cdot A - A A^2 - A \cdot A^3$$

$$= I + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4$$

Scanned by CamScanner

(4) 1. اعتماداً على طريقة التحويلات البسيطة أوجد حل النظام الخطي التالي، ومن ثمّ اكتب الحل بالصيغة الشعاعية

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$$
$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1$$
$$-3x_2 + 6x_3 - 6x_4 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (1) (1)

إذاً لدينا:
$$x_1 - 5x_3 + 8x_4 = 9$$
$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1$$

x_3 , x_4 متحولات اختيارية (1)

بالتالي فإن الحل العام

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 5x_3 - 8x_4 \\ 1 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (1)

حيث أن x_3 , x_4 متحولات اختيارية

(6) 2. حدد فيما إذا كانت مجموعات الأشعة التالية مرتبطة أم مستقلة، علل إجابتك؟

a. $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$

(1,5) a) مرتبطة خطية لأن عدد الأشعة أكبر من عدد العناصر في الأشعة

(1,5) b) مرتبطة خطية، لأن الشعاع الثاني $= \frac{1}{3} \times$ الشعاع الأول

(1,5) c) يمكن أن نحدد ذلك من النظام الخطي المتجانس $AX=0$ لبيان أن مجموعة الأشعة مستقلة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

← إذاً لا توجد متحولات اختيارية
← أي أن الأشعة مستقلة خطياً

(1,5) d) مرتبطة خطياً لأنه يوجد شعاع الصفر ضمن مجموعة الأشعة

Scanned by CamScanner

أدرس تقارب السلسلة التي حدها العام: $u_n = \frac{1}{(n+1)^2 - 1}$

حيث n عدد صحيح موجب ويأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$. ثم احسب مجموع هذه السلسلة

الحل: يكتب الحد العام بالشكل:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n}$$

ونقارنه مع الحد العام $v_n = \frac{1}{n^2}$ للسلسلة المتقاربة نجد:

$$\frac{1}{n^2+2n} < \frac{1}{n^2}$$

أي

$$u_n < v_n$$

وهذا يعني أن كل حد في سلسلتنا أصغر من الحد الذي يقابله في السلسلة المتقاربة، إذاً سلسلتنا بدورها متقاربة.

طريقة ثانية: نعلم أن السلسلة التي حدها العام $v_n = \frac{1}{n^2}$ وهي سلسلة متقاربة ولدينا

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+2n} = 1 \neq 0$$

فالسلسلتان من طبيعة واحدة، وبما أن احداهما v_n متقاربة، بالتالي u_n متقاربة

ولحساب المجموع يكتب الحد العام بالشكل:

$$u_n = \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

بإعطاء n القيم: ... ,1,2,3 نحصل على:

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$u_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$u_3 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$u_4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$$

....

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

....

بالجمع والإختصار:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Scanned by CamScanner

جامعة دمشق — الرياضيات /1/ هـ. الإلكترونيات والإتصالات — اسم الطالب:

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية — د. اسماعيل ادريس — الشعبة:

---

(5) **1. اعتماداً على مقلوب مصفوفة أوجد حل النظام الخطي التالي:**

$$\begin{cases} x \quad +10z = 5 \\ 3x+y-4z=-1 \\ 4x+y+6z = 1 \end{cases}$$

$Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b$ (1)

حتى يكون للنظام الخطي المعطى لدينا حل، يجب أن تكون المصفوفة A قابلة للقلب، أي أن $\neq 0$)

ومن أجل ذلك، نحسب

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6+0+30-(40-4) = 36-36 = 0$$ (1)

وهذا يعني أن المصفوفة A غير قابلة للقلب (1) $\Leftarrow$ أي أن النظام الخطي المعطى لدينا لا يمكن حله بالإعتماد على مقلوب مصفوفة. (1)

(5) **2. بيّن أن الأشعة** $u_1 = (0,3,1,-1)$ و $u_2 = (6,0,5,1)$ و $u_3 = (4,-7,1,3)$ **تشكّل مجموعة مرتبطة خطياً في** $\Re^4$**، ومن ثمَّ اكتب كل شعاع كتركيب خطي بدلالة الشعاعين الآخرين.**

نفرض أن $c_1\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}6\\0\\5\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}4\\-7\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ عندئذ (1)

$$\left.\begin{aligned} 6c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 3c_1 - 7c_3 &= 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$ (1)

بالتالي (*) تملك نفس الحل للنظام التالي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 \to r_4 + r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 \to 5r_4 + 2r_2]{r_3 \to 5r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{r_2 \to -\frac{1}{5}r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ (1)

ومنه ينتج $c_1 + 5c_2 + c_3 = 0$، $2c_2 + 2c_3 = 0$ وبالتالي هناك حل عام هو (1) $c_3 = \alpha$ و $c_2 = -\frac{2}{3}\alpha$ و $c_1 = \frac{7}{3}\alpha$، إذاً هنالك حلول غير صفرية وتلك الأشعة مرتبطة خطية. لنأخذ $\alpha = 3$ نجد

$$7\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}6\\0\\5\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}4\\-7\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$ (1)

وهكذا فإن $\begin{pmatrix}0\\3\\ \vdots\end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix}6\\0\\ \vdots\end{pmatrix} - \frac{3}{7}\begin{pmatrix}4\\-7\\ \vdots\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}6\\0\\ \vdots\end{pmatrix} = \frac{7}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\ \vdots\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}4\\-7\\ \vdots\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4\\-7\\ \vdots\end{pmatrix} = -\frac{7}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\ \vdots\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}6\\0\\ \vdots\end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

ادرس تقارب السلسلة التي حدها العام : $\frac{n}{(n+1)!}$

حيث n عدد صحيح موجب، وبأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$ ، ثم ا

الحل: حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$$

والسلسلة متقاربة.

ولحساب مجموعها نكتب الحد العام بالشكل :

$$u_n=\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

نختصر :

$$u_n=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

بإعطاء n القيم $1, 2, 3, \ldots$ نحصل على :

$$u_1=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}$$

$$u_2=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$$

$$u_3=\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$$

$$\ldots\ldots$$

$$u_n=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\ldots\ldots$$

بالجمع والاختصار نجد :

$$S=1$$

جامعة دمشق — الرياضيات /1/ — اسم الطالب:

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية — هـ. الإلكترونيات والإتصالات — الشعبة:

(5) **1.** أوجد بطريقة المعينات (Cramer's rule) قيمة x التي تحقق النظام الخطي التالي:

كرامر

$$\begin{aligned} 2x+3y+z+v &= 5\\ x-y-z+v &= 0\\ 3x+2y-2z &= 1\\ 4x-4y+v &= 0 \end{aligned}$$

الحل: لدينا

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -2 & 0\\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

بطرح السطر الرابع من السطرين الأول والثاني

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 0\\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر العمود الرابع

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1\\ -3 & 3 & -1\\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -70 \quad (1)$$

من جهة ثانية لدينا

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

نضيف العمود الرابع إلى كل من العمودين الثاني والثالث

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق عناصر السطر الثاني

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -30 \quad (1)$$

ويكون

$$x = \frac{D_x}{\Delta} = \frac{-30}{-70} = \frac{3}{7} \quad (1)$$

ادرس تقارب السلسلة العددية التي حدها العام:

$$u_n = \frac{n^2 - n}{(n+1)!}$$

حيث n عدد صحيح موجب ويأخذ قيماً اعتباراً من $n=1$، ثم احسب مجموع هذه السلسلة

الحل: يكتب الحد العام بالشكل

$$u_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)!}$$

حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n(n-1)}$$

نختصر

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة.

ولحساب المجموع يكتب الحد العام بالشكل:

$$u_n = \frac{n^2}{(n+1)!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

أو

$$u_n = \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

نختصر

$$u_n = \frac{n-1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

وأخيراً:

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}$$

نعطي إلى n القيم

$$u_1 = \frac{1}{0!} + \frac{2}{2!} - \frac{2}{1!}$$

$$u_2 = \frac{1}{1!} + \frac{2}{3!} - \frac{2}{2!}$$

$$u_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{4!} - \frac{2}{3!}$$

- - - - - - - - - - - -

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{(n+1)!} - \frac{2}{n!}$$

- - - - - - - - - - - -

بالجمع

$$S = e + 2(e-2) - 2(e-1)$$

نختصر

$$S = e - 2$$

Scanned by CamScanner

جامعة دمشق. الرياضيات /1/ هـ. الإلكترونيات والإتصالات اسم الطالب:

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية د. اسماعيل ادريس الشعبة:

---

(6) **1.** بيّن فيما اذا كانت الأشعة $(1,2,3),(1,-1,2),(1,-4,2)$ في الفضاء $\Re^3$ مستقلة خطياً.

نفرض أن (1)

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

عندئذٍ

$$\left.\begin{aligned}C_1+C_2+C_3&=0\\2C_1-C_2-4C_3&=0\\3C_1+2C_2+2C_3&=0\end{aligned}\right\}\ (*)$$

إن حلول النظام $(*)$ هي نفسها الحلول الناتجة عن تدرج المصفوفة الموسعة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&-1&-4&0\\3&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3\to r_3-3r_1]{r_2\to r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-3&-6&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to -\frac{1}{3}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\to r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\ (1)$$

أي أن

$$C_1+C_2+C_3=0$$
$$(1)\quad C_2+2C_3=0$$
$$C_3=0$$

(1)

بالتالي فإن للنظام $(*)$ حل وحيد هو الحل الصفري $C_1=C_2=C_3=0$، وهذا يعني أن مجموعة الأشعة المعطاة مستقلة خطياً. (1)

(4) **2.** أوجد المصفوفة A ، إذا علمت أن $(2I_2+A^T)^{-1}=B^2$ و $B=\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}$. وضح كل خطوة من خطوات الحل بالتفصيل.

$$\left(2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+A^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+A^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}4&12\\0&1\end{bmatrix}\ (1)$$

نأخذ مقلوب الطرفين $(A^{-1})^{-1}=A$

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+A^T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&-12\\0&4\end{bmatrix}\ (1)$$

$$A^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&-3\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{7}{4}&-3\\0&-1\end{bmatrix}\ (1)$$

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{7}{4}&0\\-3&-1\end{bmatrix}\ (1)$$

Scanned by CamScanner

لتكن السلسلة

$$\frac{2^3}{3!} + \frac{3^3}{4!} + \frac{4^3}{5!} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n!} + \cdots$$

برهن أنها متقاربة واحسب مجموعها.

الحل: حسب دالامبير

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)^3}$$

نختصر

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)(n-1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة.

لحساب مجموع السلسلة نكتب الحد العام بالشكل:

$$u_n = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{n!}$$

أو:

$$u_n = \frac{n^2}{(n-1)!} - \frac{3n(n-1)}{n!} - \frac{1}{n!}$$

$$u_n = \frac{n^2 - 1 + 1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{n-2+3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{3}{(n-2)!} - \frac{1}{n!}$$

$d_n = d_1 + (n-1)R$

وأخير

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n}$$

ومن مقارنة الحد العام مع الحد الأول نستنتج أن n تأخذ قيماً صحيحة

بدءاً من 3، وبإعطاء n القيم: $3, 4, 5, \ldots$ نجد

$$u_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$u_2 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

$$u_3 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$$

- - - - - - - - -

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

بالجمع والاختصار

$$S = e + \frac{1}{2}$$

Scanned by CamScanner

جامعة دمشق   الرياضيات /1/ هـ الإلكترونيات والإتصالات   اسم الطالب:

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية   د. اسماعيل ادريس   الشعبة:

---

(7) **1. أوجد قيمة لـ q بحيث تكون الأشعة التالية مستقلة خطياً:**

$$(1,1,2,1),(2,1,2,3),(1,4,2,1),(-1,3,5,q)$$

لنفرض (1) $c_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\4\\2\\1\end{pmatrix}+c_4\begin{pmatrix}-1\\3\\5\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ عندئذ

$$(*)\left\{\begin{array}{l} c_1+2c_2+c_3-c_4=0\\ c_1+c_2+4c_3+3c_4=0\\ 2c_1+2c_2+2c_3+5c_4=0\\ c_1+3c_2+c_3+qc_4=0\end{array}\right.$$

وبالتالي فإن $(*)$ تملك نفس الحل الذي يملكه النظام التالي:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&0\\1&1&4&3&0\\2&2&2&5&0\\1&3&1&q&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_4\to r_4-r_1]{r_2\to r_2-r_1,\ r_3\to r_3-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&0\\0&-1&3&4&0\\0&-2&0&7&0\\0&1&0&q+1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_4\to r_4+r_2]{r_3\to r_3-2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&0\\0&-1&3&4&0\\0&0&-6&-1&0\\0&0&3&q+5&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_4\to 2r_4+r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&0\\0&-1&3&4&0\\0&0&-6&-1&0\\0&0&0&2q+9&0\end{array}\right) \ (1)$$

إذاً إن النظام يملك حلاً وحيداً $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ إذا وفقط إذا كان $2q+9\neq 0$

ومنه ينتج أن الأشعة المعطاة تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان $2q+9\neq 0$

وهذا يعني من أجل $q=1$ (1) (على سبيل المثال) تكون مجموعة الأشعة مستقلة خطياً. (1)

(3) **2. لتكن**

$$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a+2g&b+2h&c+3i\\d+3g&e+3h&f+3i\\g&h&i\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}g&h&i\\2d&2e&2f\\a&b&c\end{bmatrix}$$

ولنفرض أن $\det A=5$. **أوجد** $\det B$ و $\det C$ و $\det(AC)$ ؟

الحل: بالإعتماد على خواص المعينات

- (1) $\det B=\det A=5$ لأن B ينتج عن A، حيث أن قيمة المعين لا تتغير إذا أضفنا (أو طرحنا) إلى عناصر أحد الأسطر عناصر سطر آخر مضروبة بعدد ثابت.
- (1) $\det C=-2.\det A=-10$ لأن C ينتج عن A، حيث أنه إذا ضربنا جميع عناصر سطر ما معين بعدد واحد فإن المعين يضرب بهذا العدد.
- (1) $\det(AC)=\det A\cdot\det C=-50$

Scanned by CamScanner

أوجد نصف قطر التقارب للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ ، ومن ثم حدد مجال تقاربه.

الحل: لدينا $a_n=\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ ، بالتالي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}\cdot\frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3}\longrightarrow\frac{|x+2|}{3}$$ عندما $n\to\infty$

إذاً بالاعتماد على اختبار النسبة (اختبار دالامبير) ، نجد أن السلسلة تتقارب إذا كان $\frac{|x+2|}{3}<1$ وتتباعد إذا كان $\frac{|x+2|}{3}>1$ ، وعليه إذاً تتقارب من أجل $|x+2|<3$ وتتباعد $|x+2|>3$ ، وهذا يعني أن نصف قطر التقارب $R=3$.

ولإيجاد الآن مجال التقارب ، يمكننا كتابة المتراجحة $|x+2|<3$ على الشكل $-5<x<1$ ، عندئذ يمكن اختبار تقارب السلسلة على طرفي المجال -5 و 1 . فمن أجل $x=-5$ ، نلاحظ أن السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

تتباعد وفق اختبار التباعد [لأن $(-1)^n n$ لا تتقارب من الصفر] .

وعندما $x=1$ ، فإن السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(3)^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n$$

تتباعد أيضاً وفق اختبار التباعد .

وهذا يعني أن السلسلة تتقارب فقط عندما $-5<x<1$ ، وعليه فإن مجال تقارب السلسلة هو المجال المفتوح $]-5,1[$

Scanned by CamScanner

لتكن:

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\4\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

هل b هو تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3

الحل: إن b يمكن أن يكون تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3 إذا وفقط إذا وجد حل للمعادلة الشعاعية $x_1 a_1+x_2 a_2+x_3 a_3=b$، ومن أجل ذلك نكتب المصفوفة الموسعة وندرجها.

$$\begin{pmatrix}1&0&5&2\\-2&1&-6&-1\\0&1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{2R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&4&3\\0&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&4&3\\0&1&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)R_2+R_3\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&5&2\\0&1&4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ومن الشكل النموذجي للمصفوفات نلاحظ أن النظام الخطي يملك عدد غير منتهٍ من الحلول

$x_1 = 2 - 5x_3$

$x_2 = 3 - 4x_3$

x_3 is free

وبما أن المعادلة الشعاعية تملك حلاً، إذاً b هو تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3.

فعلى سبيل المثال، عندما $x_3=0$ فإن $x_1=2$ & $x_2=3$

Scanned by CamScanner

(5) جد قيم a التي تكون من أجلها مجموعة الحل للنظام الخطي التالي

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 = a$$

(a) خالية ، (b) تملك حلاً وحيداً . (c) تملك عدد غير منته من الحلول

الحل: لتحديد وجود ووحدانية الحل نكتب مبدئياً المصفوفة الموسعة

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$$

من السطر الأخير نجد أن

$$(a^2-4)x_3 = a-2$$

وعليه يكون النظام حلاً وحيداً ، إذا كان $a^2-4 \neq 0$ أي $a \neq \pm 2$

أما في حال $a=2$ فإن للنظام عدد غير منته من الحلول .

وفي حال $a=-2$ فإننا نجد من السطر الأخير

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$$

أي أن النظام عندئذ غير قابل للحل ،

Scanned by CamScanner

بيّن فيما إذا كانت الأشعة $(1,2,3),(1,-1,2),(1,-4,2)$ في الفضاء $\mathbb{R}^3$ مستقلة خطياً:

الحل: تكون الأشعة الثلاثة مستقلة خطياً إذا وجد للمعادلة الشعاعية

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

حلاً وحيداً وهو الحل الصفري، وللتأكد من ذلك نكتب

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \overset{?}{=} 0$$

ولهذا نكتب المصفوفة الموسعة:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&-1&-4&0\\3&2&2&0\end{array}\right)\xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-2&-5&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&0\\0&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&\frac{5}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}&0\end{pmatrix}$$

من السطر الأخير نستنتج $\frac{3}{2}x_3=0$ أي $x_3=0$

نعوض في السطر الثاني فنجد $x_2=0$ وبالتالي $x_1=0$

أي أن المعادلة الشعاعية $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=0$ تقبل الحل الصفري.

وبالتالي الأشعة مستقلة خطياً.

Scanned by CamScanner

السؤال الثالث (٥ درجات): أوجد المصفوفة A ، إذا علمت أن:

$$(2I_2 + A^T)^{-1} = B^2 \quad \& \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وضح كل خطوة من خطوات الحل بالتفصيل.

الحل:

$$\left(2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نأخذ معكوس الطرفين مع مراعاة $(A^{-1})^{-1} = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + A^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

(1) ليكن: $a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}5\\-4\\-7\end{pmatrix}$

هل b هو تركيب خطي لـ a_1 , a_2 , a_3

الحل: إن b يمكن أن يكون تركيب خطي لـ a_1 , a_2 , a_3 إذا وفقط إذا وجد حل للمعادلة الشعاعية $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$ ، ومن أجل ذلك نكتب المصفوفة الموسعة وندرجها

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\-1&-1&-1&-4\\0&-1&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\0&-3&2&1\\0&-1&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[-3R_3+R_2\to R_2]{-3R_3+R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&9&19\\0&0&11&22\\0&-1&-3&-7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&9&19\\0&0&11&22\\0&-1&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{11}R_3\to R_3]{R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&0&9&19\\0&-1&-3&-7\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-3R_3+R_2\to R_2\\ -R_2\to R_2}]{-9R_3+R_1\to R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$ (1)

ومن الشكل النموذجي للاصطفاف نلاحظ أن النظام الخطي يملك حلاً وحيداً

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$ (1)

$x_3 = 2$

أي أن

$$1.a_1 + 1.a_2 + 2.a_3 = b$$

بالتالي إن b هو تركيب خطي لـ a_1, a_2, a_3 (1)

لتكن السلسلة الصحيحة : $\frac{x}{2+1^3}+\frac{x^2}{2+2^3}+\frac{x^3}{2+3^3}+\cdots$

والمطلوب أوجد صيغة حدها العام وحدد مجال تقاربها ، ومن ثم عين طبيعة السلسلة من أجل طرفي المجال :

الحل :

• حدها العام هو $U_n=\frac{x^n}{2+n^3}$

•• لدراسة تقاربها نطبق دالامبير

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^3}\cdot\frac{2+n^3}{x^n}\right|<1$$

بالاختصار

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+n^3}{2+(n+1)^3}\cdot|x|<1$$

أي

$$|x|<1\implies -1<x<1$$

••• من أجل $x=1$ نعوض :

$$\frac{1}{2+1^3}+\frac{1}{2+2^3}+\cdots+\frac{1}{2+n^3}+\cdots$$

وهي سلسلة عددية ، ولدراسة تقاربها نقارن حدها العام :

$$U_n=\frac{1}{2+n^3}$$

مع الحد العام : $V_n=\frac{1}{n^2}$ للسلسلة المتقاربة ، نجد

$$\frac{1}{2+n^3}<\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{n^2}$$

وبالتالي $U_n<V_n$ ، أي كل حد في سلسلتنا أصغر من الحد الذي يقابله في السلسلة المتقاربة ، وبالتالي فسلسلتنا بدورها متقاربة .

ومن أجل $x=-1$ نعوض :

$$\frac{-1}{2+1^3}+\frac{1}{2+2^3}-\frac{1}{2+3^3}-\frac{(-1)^n}{2+n^3}\cdots$$

وهي سلسلة متناوبة ، والقيم المطلقة لحدودها متناقصة ، وحدها العام ينتهي إلى الصفر ، فهي حسب لايبنيز Leibnitz متقاربة

نظرية لايبنيز Leibnitz

إذا كانت حدود السلسلة المتناوبة متناقصة بالقيمة المطلقة وانتهى حدها العام إلى الـ

(8) إدرس تقارب السلسلة التي حدها العام $u_n = \dfrac{n^2+n-1}{(n-1)!}$

حيث n عدد صحيح موجب إعتباراً من $n=1$ ، ثم احسب مجموع هذه السلسلة

الحل: حسب دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^2+n-1}$$

بالإختصار:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^3+n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة (5)

ولحساب المجموع نكتب الحد العام بالشكل

$$u_n = \frac{n^2-1}{(n-1)!} + \frac{n}{(n-1)!} \quad \text{(I)}$$

$$= \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$= \frac{n+2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{(II)}$$

$$= \frac{n-2+4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{(III)}$$

بجعل: $n=1$ في (I) ، $n=2$ في (II) ، $n=3,4,5,\dots$ في (III):

$$u_1 = \frac{1}{0!}$$

$$u_2 = \frac{4}{0!} + \frac{1}{1!}$$

$$u_3 = \frac{1}{0!} + \frac{4}{1!} + \frac{1}{2!}$$

. . . .

$$u_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{4}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

. . . .

بالجمع طرفاً إلى طرف بعد جعل $n \to \infty$ نجد:

$$S = e + 4e + e = 6e \quad (3)$$

- من أجل $b=(0,0,0)$ ، تصبح المصفوفة السابقة على الشكل التالي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ رياضيات

نقرر مكافئ عام

وبالتالي فإن الحل العام يعطى كمايلي $x_1 = x_3$ ، $x_2 = -x_3$ و x_3 حرة

اختياري ، وهذا الحل يكتب بالصيغة الشعاعية الوسيطية:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهذه المعادلة تمثل هندسياً معادلة مستقيم يمر من مبدأ الإحداثيات في فضاء ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$. (1)

- أما من أجل $b=(2,0,-2)$ ، فإن المصفوفة السابقة تصبح

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه فإن الحل العام في هذه الحالة $x_1 = -1 + x_3$ ، $x_2 = -1 - x_3$ حيث x_3 متحول اختياري ، وهذا الحل يكتب بالصيغة الشعاعية الوسيطة كمايلي:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (1)

والتي تمثل أيضاً مستقيماً يمر بالنقطة $(-1,-1,0)$ ، وبالتالي ، مجموعات الحل للنظام المتجانس والنظام غير المتجانس تمثلان هندسياً مستقيمان متوازيان في $\mathbb{R}^3$ يختلفان / يبتعدان عن بعضهما بشعاع قيمته $(-1,-1,0)$. (1)

(8). أوجد نصف قطر تقارب السلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ ، ومن ثم جد مجال تقاربه.

الحل: لدينا $a_n = \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$ ، بالتالي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n \cdot x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \longrightarrow 3x \quad \text{عندما} \quad n \longrightarrow \infty$$

والآن بالإعتماد على اختبار النسبة (اختبار دالامبير)، نجد أن السلسلة تتقارب

إذا كانت $3|x|<1$ وتتباعد إذا كان $3|x|>1$. وعليه إذاً تتقارب من

أجل $|x|<\frac{1}{3}$ وتتباعد من أجل $|x|>\frac{1}{3}$. وهذا يعني أن نصف قطر

التقارب $R=\frac{1}{3}$. (5)

ولإيجاد مجال التقارب، نعلم أن السلسلة تتقارب في المجال $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

ولكن يبقى علينا معرفة تقاربها على طرفي المجال، ولهذا نجد أنه إذا كان

$x=-\frac{1}{3}$ فإن السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

تتباعد.

وعندما $x=\frac{1}{3}$ ، فإن السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

تتقارب وذلك وفق اختبار السلسلة المتناوبة، أعني أن سلسلة القوى

المعطاة تتقارب عندما $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$ ، إذاً مجال التقارب هو $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

(3)

Scanned by CamScanner